Il y a encore du TAF !

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty
Université Paul Sabatier de Toulouse
http ://www.math.univ-toulouse.fr/˜jbhu/

Résumé. Nous passons en revue un certain nombre de propriétés des "points intermédiaires" $c^f(a,b)$ qui apparaissent dans le théorème des accroissements finis ou théorème de la valeur moyenne, via l'expression $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'\left[c^f(a,b)\right]$. Un parcours de la littérature sur le sujet, en partie fort ancienne, nous a permis de mettre en exergue ces propriétés, parfois oubliées. La présentation que nous en faisons est sous forme d'un jeu de questions-réponses ou quiz.

Mots-clés. Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis. Théorème de la valeur moyenne. Fonctions strictement convexes. Moyennes.

Introduction

Dans ce travail, nous poursuivons une "revisite" du théorème de Rolle et du théorème des accroissements finis (TAF) [1] (encore appelé théorème de la valeur moyenne, ou théorème de Lagrange) telle que commencée dans nos trois notes précédentes [10, 11, 12]. S'il y a un théorème central en Analyse réelle élémentaire (domaine répertorié parfois sous le vocable de *Calculus*), c'est bien ce théorème-là. C'est un sujet d'études très ancien, qui a intéressé nombre de mathématiciens, et que nous continuons à fouiller. Il y a quelques études historiques sur le sujet ([5], [6, pages 54 − 67]). Une consultation de bases de données comme MathSciNet [2] produit des dizaines et des dizaines de références sur le thème, parfois des notes très courtes et sans grand intérêt, parfois des pépites et des résultats oubliés, parfois des articles de revue (un exemple en est [14]).

Après avoir rappelé le theorème de Rolle, le TAF, et leur articulation mutuelle (§1), nous proposons au paragraphe principal (§2.2) une sorte de quiz sur le TAF, en une douzaine de questions-réponses, mettant en lumière

1. Dans le langage familier, *"il y a du TAF"* signifie *"il y a du travail à faire"*. Par ailleurs, dans la région toulousaine (et toute la région Occitanie), l'acronyme TAF est attachée aux salons Travail-Avenir-Formation, tout un programme !

2. Mots-clés utilisés :
- En français : *théorème des accroissements finis, théorème de la valeur moyenne.*
- En anglais, *finite increment theorem, mean value theorem.*

des résultats peu ou pas connus, et que nous avons recueillis en butinant sur la kyrielle de références trouvées dans les bases de données.

1. Le "jeu de Rolle"

1.1 Quel est le "Rolle exact" ?

Au début était ROLLE [3]... Le théorème de ROLLE sert à démontrer ledit théorème des accroissements finis [4] (le TAF, ou théorème de la valeur moyenne, ou de LAGRANGE), et celui-ci n'en est qu'un cas particulier ; bref, les deux résultats sont (mathématiquement) équivalents en portée.

Rappelons ce que dit le théorème de ROLLE. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, avec $f(a) = f(b)$. Il existe alors $c \in\,]a,b[$ en lequel $f'(c) = 0$. Il y a au moins deux approches pour démontrer ce théorème.

- La première est comme suit.

Puisque $f(a) = f(b)$, il existe alors $c \in\,]a,b[$ en lequel f est maximisée ou minimisée sur $[a,b]$, c'est-à-dire

$$f(c) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \text{ ou bien } f(c) = \min_{x\in[a,b]} f(x). \tag{1}$$

C'est la *continuité* de f sur le segment $[a,b]$ qui est l'hypothèse qui a permis cela. Ensuite, c étant à l'intérieur de l'intervalle $[a,b]$, la relation (1) induit nécessairement que $f'(c) = 0$. C'est la fameuse règle (ou condition nécessaire d'optimalité) de FERMAT. Ici, c'est l'hypothèse de *dérivabilité* de f sur $]a,b[$ qui a été utilisée.

- La deuxième, que nous avons explicitée en détail dans [12], est la "méthode des cordes" ou "à la POMPEIU" : on construit une suite d'intervalles emboités $[a_n, b_n] \subset\,]a,b[$, avec $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$ et $f(a_n) = f(b_n)$; le point-limite commun c des suites (a_n) et (b_n) vérifie $f'(c) = 0$.

Dans la première méthode, les points $c \in\,]a,b[$ répondant à la question posée sont obtenus par maximisation ou minimisation (globale ou absolue) de f sur $[a,b]$. Ce n'est pas toujours le cas dans la deuxième. Mais peu importe, le théorème de ROLLE est un théorème d'*existence* ; il ne nous dit

3. M. ROLLE, dont le nom est resté dans les mathématiques avec ce théorème, était pourtant un farouche opposant du calcul différentiel naissant qu'il qualifiait de "collection de mensonges bien trouvés".

4. On utilise le vocable "accroissements finis" pour marquer la différence avec "accroissement infinitésimal". Dans la définition première de la dérivée $f'(x)$ de f en x, c'est-à-dire, $f(x+h)-f(x) = f'(x)h + h\varepsilon(h)$, où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 avec h, on voit bien que l'information est de caractère "infinitésimal" : plus h est petit, plus l'évaluation de $f(x+h) - f(x)$ est précise. Dans la version "accroissements finis", l'évaluation de $f(x+h) - f(x)$ est exacte, que h soit petit ou pas.

pas combien il y a de tels "points intermédiaires" c, où ils se trouvent dans $]a, b[$, et à quoi connaître ces c pourrait servir.

1.2 Et si on se contentait d'un "Rolle approché" ?

Si on n'est pas sûr d'avoir $f(a) = f(b)$, mais seulement $f(a)$ et $f(b)$ approximativement égaux à α, par exemple $|f(a) - \alpha| \leqslant \varepsilon$ et $|f(b) - \alpha| \leqslant \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est une tolérance résultant de la précision des calculs par exemple, que peut-on dire dans le style "théorème de Rolle approché" ? Une première réponse est qu'on n'est plus assuré d'avoir un $c \in]a, b[$ en lequel $f'(c) = 0$, cela est facile à voir... mais quoi alors ? Voici un résultat simple dans cette direction.

Théorème 1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, avec $|f(a) - \alpha| \leqslant \varepsilon$ et $|f(b) - \alpha| \leqslant \varepsilon$. Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que*

$$|f'(c)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{b-a}. \tag{2}$$

Trois observations avant d'en faire la démonstration :

- Le résultat est une trivialité si on a déjà démontré le théorème de Rolle (exact) et donc le TAF. Le challenge ici est de démontrer ce résultat en n'utilisant que deux ingrédients de base de l'Analyse réelle, comme pour la (première forme de la) démonstration du théorème de Rolle, à savoir : une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et y atteint ses bornes ; une fonction dérivable minimisée en un point de $]a, b[$ a une dérivée nulle en ce point.

- On ne pourra pas faire mieux que la majoration (2). Prenons en effet la fonction $f : x \mapsto f(x) = -\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{b-a}(x - a)$. On a $f(a) = -\varepsilon$ et $f(b) = \varepsilon$; puis $f'(c) = \frac{2\varepsilon}{b-a}$ pour tout $c \in]a, b[$.

- Il suffit de démontrer le Théorème 1 dans le cas où $[a, b] = [-1, 1]$. Un changement de fonctions $t \in [-1, 1] \mapsto f\left[\frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}\right]$ conduit au cas général. Dans ce contexte "réduit", soit donc $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$, avec $|f(-1)| \leqslant \varepsilon$ et $|f(1)| \leqslant \varepsilon$. Il nous faut démontrer l'existence de $c \in]-1, 1[$ en lequel $|f'(c)| \leqslant \varepsilon$.

Démonstration du Théorème 1. La tolérance $\varepsilon > 0$ étant une quantité fixe, introduisons la fonction auxiliaire $x \in [-1, 1] \mapsto g(x) = x^2 - \left[\frac{f(x)}{\varepsilon}\right]^2$. La fonction g est continue sur $[-1, 1]$ et sa borne inférieure y est atteinte. Deux observations préliminaires :

- On a

$$\mu = \min_{x \in [-1,1]} g(x) \leqslant g(0) = - \left[\frac{f(0)}{\varepsilon}\right]^2 \leqslant 0. \tag{3}$$

- La fonction g est dérivable sur $]-1,1[$ avec

$$g'(x) = 2\left[x - \frac{f(x)}{\varepsilon^2} f'(x)\right]. \tag{4}$$

Deux cas sont à considérer à présent, suivant que $\mu = 0$ ou $\mu < 0$.

Cas où $\mu = 0$.

D'après (3), on a $g(0) = f(0) = 0$ et, de par la définition de g et μ, on déduit

$$\frac{|f(x)|}{\varepsilon} \leqslant |x| \text{ pour tout } x \in [-1,1].$$

La définition de la dérivée de f en 0, tenant compte du fait que $f(0) = 0$, permet de déduire de l'inégalité au-dessus : $|f'(0)| \leqslant \varepsilon$.

Cas où $\mu < 0$.

Comme $g(1) \geqslant 0$ et $g(-1) \geqslant 0$, la fonction g est minimisée sur $[-1,1]$ en un point $c \in]-1,1[$, et donc $g'(c) = 0$. En un tel point c, nous avons :

$$g(c) = \mu < 0\,;\; g'(c)/2 = c - \frac{f(c)}{\varepsilon^2} f'(c) = 0. \tag{5}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{f(c)}{\varepsilon^2} f'(c)\right]^2 &= c^2 = \mu + \left[\frac{f(c)}{\varepsilon}\right]^2 \text{ (par définition de } g\text{)},\\
\left[\frac{f(c)}{\varepsilon^2} f'(c)\right]^2 &\leqslant \left[\frac{f(c)}{\varepsilon}\right]^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Comme $f(c) \neq 0$ (sinon on aurait $c = 0$ et donc $\mu = 0$, ce qui a été exclu dans le cas que nous traitons), il vient finalement de (6) : $[f'(c)]^2 \leqslant \varepsilon^2$, soit encore $|f'(c)| \leqslant \varepsilon$. CQFD.

Remarque. Le "théorème de Rolle approché" prend toute sa valeur dans le contexte des fonctions de plusieurs variables ; la démonstration est similaire, *mutatis mutandis*, mais le résultat final non trivial (voir [2] et les références qui s'y trouvent). Le voici en version parallèle au Théorème 1.

Théorème 1'. *Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon r, soit $\overline{B}$ la boule fermée de centre 0 et de rayon r (la norme $\|.\|$ utilisée est la norme euclidienne usuelle). Considérons une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{B}$ et différentiable sur B. On suppose que f est approximativement égale à α sur le bord de B, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f(x) - \alpha| \leqslant \varepsilon$ pour tout x vérifiant $\|x\| = r$.*

Il existe alors $c \in B$ tel que $\|\nabla f(c)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{r}$.

2. Maintenant passons au TAF...

2.1 Mise en situation

Rappelons le TAF tel qu'il est formulé habituellement, sous sa forme "égalité" en tout cas.

Théorème 2. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur l'intervalle fermé* $[a, b]$ *et dérivable sur l'intervalle ouvert* $]a, b[$*. Il existe alors* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{7}$$

Si $f(a) = f(b)$, c'est le théorème de ROLLE. Sinon, pour une fonction f qui ne vérifie pas $f(a) = f(b)$, afin d'appliquer le théorème de ROLLE, on "rectifie le tir" en proposant la fonction auxiliaire

$$x \mapsto \widehat{f}(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{8}$$

On a fait ce qu'il fallait pour avoir $\widehat{f}(a) = \widehat{f}(b)$ $(= f(a))$. De plus, la continuité de f sur $[a, b]$ induit celle de $\widehat{f}$ sur $[a, b]$, et la dérivabilité de f sur $]a, b[$ implique celle de $\widehat{f}$ sur $]a, b[$, avec

$$\widehat{f}'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ pour tout } c \in]a, b[\,. \tag{9}$$

L'intérêt de cette démonstration, outre sa simplicité, est que l'on voit bien la signification graphique ou géométrique de $\widehat{f}(x)$. Reconnaissons quand même que cette fonction $\widehat{f}$ apparaît comme un *Deus ex machina.* Cette méthode, désormais habituelle de démonstration du théorème des accroissements finis, est, selon les historiens du domaine, due à O. BONNET (mentionné dans un cours de SERRET en 1868).

Mais il y aussi d'autres fonctions auxiliaires à qui on applique le théorème de ROLLE et qui, par conséquent, donnent d'autres formes de démonstration du TAF. Par exemple, en permutant a et b dans (8) (la valeur commune aux extrémités a et b est alors $f(b)$), ou bien :

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x \\ &\quad \text{(valeur commune } \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \text{ aux extrémités)} ; \\ h(x) &= f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left(x - \frac{a + b}{2} \right) \\ &\quad \text{(valeur commune } \frac{f(a) + f(b)}{2} \text{ aux extrémités).} \end{aligned}$$

Mais il y en a bien d'autres ([14], [9, Vol. 2]).

Les exercices et résultats venant de l'application du théorème de ROLLE sont toujours de la forme *"Il existe c tel que... "* ; souvent ils sont accompagnés d'une interprétation géométrique intéressante qui fait réviser la géométrie du plan (droites, distances, etc.).

Nous désignerons par $C(a,b)$ l'ensemble des points $c \in \,]a,b[$ vérifiant $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Quand il est nécessaire de signaler la dépendance en f, nous utiliserons la notation $C^f(a,b)$. Quand cet ensemble est réduit à un seul élément, celui-ci sera noté $c(a,b)$ ou $c^f(a,b)$.

Il est naturel d'étendre la définition de ces "points intermédiaires $c(a,b)$" au cas où $a = b$ en posant $c(d,d) = d$.

La formulation du TAF que nous avons présentée (*cf.* (7)) est, selon notre terminologie, *sous le format* $a - b - c$. Il existe une autre présentation du même résultat, sous le format que nous appelons *format* $x - h - \theta$. La voici. *Soit* $f : [x, x+h] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur l'intervalle fermé* $[x, x+h]$ *(avec* $h > 0$*) et dérivable sur l'intervalle ouvert* $]x, x+h[$*. Il existe alors* $\theta(x,h) \in \,]0,1[$ *(appelé "coefficient") tel que*

$$f(x+h) = f(x) + hf'\left[x + \theta(x,h)h\right]. \tag{7'}$$

La relation suivante est claire

$$\theta(x,h) = \frac{c(x, x+h) - x}{h}. \tag{10}$$

Toutefois, pour notre exposé, la formulation $a - b - c$, symétrique en a et b, est préférable en règle générale.

Exemple. Soit $f : x \geqslant 0 \mapsto f(x) = x^\alpha$, où $\alpha > 0$ est différent de 1. Pour le choix de $x = 0$, un simple exercice de calcul conduit à $\theta^f(0,h) = (\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. C'est une situation particulière où le coefficient $\theta^f(0,h)$ ne dépend pas de h. Alors :

- Pour $0 < \alpha < 1$, f est une fonction strictement concave. Le coefficient $\theta^f(0,h)$ balaye toute la plage $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ quand α varie de 0 à 1.

- Pour $\alpha > 1$, f est une fonction strictement convexe. Le coefficient $\theta^f(0,h)$ balaye toute la plage $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ quand α varie de 1 à $+\infty$.

Le point-frontière $\frac{1}{e}$ n'échappe pas aux valeurs que peut prendre le coefficient $\theta^f(0,h)$. En effet, pour $f : x \geqslant 0 \mapsto f(x) = x\ln(x)$ (avec $0\ln(0) = 1$), on a $\theta^f(0,h) = \frac{1}{e}$.

2.2 Le TAF sous forme de quiz...

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I. Nous allons passer en revue les propriétés de $C^f(a,b)$, ainsi que les caractérisations de f

au vu des propriétés de $C^f(a,b)$, sous forme de questions-réponses ou quiz. Pour simplifier, et sans perte de généralité, nous prenons $I = \mathbb{R}$ ou, parfois, $I =]0, +\infty[$.

Q1. Les points de $C^f(a,b)$ peuvent-ils être n'importe où entre a et b ?

La réponse est oui, comme cela est facile à voir ; les hypothèses faites sur f laissent le champ libre à une grande flexibilité. Ce n'est que lorsqu'on met des hypothèses fortes sur f qu'on peut en dire plus sur les $c \in C^f(a,b)$. Par exemple, pour des fonctions polynomiales f de degré 3,

$$\left| c - \frac{a+b}{2} \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b-a}{2}. \tag{11}$$

Tous les points de cet intervalle centré en $\frac{a+b}{2}$ peuvent être des $c \in C^f(a,b)$ pour une fonction polynomiale f de degré 3 (voir exemple plus bas). Ceci avait été remarqué par POMPEIU entre autres ([18]). Cette “localisation” est minimale, au sens qu'on ne peut pas réduire cet intervalle ; la fonction $f(x) = x^3$ sur $[-1,1]$, avec $C^f(-1,1) = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ est là pour l'illustrer.

Il y a des résultats du même style pour les fonctions polynomiales de degré au plus n (voir [20] et [19, Section 6.5] par exemple).

Exemple. Pour $k \geqslant 0$, soit $f_k : x \mapsto f_k(x) = x^3 + kx^2$. Alors :

$$\begin{aligned} C^{f_k}(-1,1) &\ni \frac{-k + \sqrt{k^2+3}}{3} \to 0 = c^{x^2}(-1,1) \text{ quand } k \to +\infty, \\ C^{f_k}(-1,1) &\ni \frac{-k + \sqrt{k^2+3}}{3} \to \frac{1}{\sqrt{3}} \in C^{f_0}(-1,1) \text{ quand } k \to 0. \end{aligned}$$

Q2. **$C^f(a,b)$ peut-il être un intervalle pour tout a et b ?**

La réponse est oui, et cela se produit si et seulement si f ou $-f$ est une fonction convexe ([10, Theorem 3]. Dans ce cas, les intervalles $C^f(a,b)$ sont intersections de fermés avec $]a,b[$. En effet, une fonction convexe (ou concave) dérivable est automatiquement continûment dérivable, et donc un ensemble de niveau de f' est fermé.

Q3. **$C^f(a,b)$ peut-il être réduit à un seul élément pour tout a et b ?**

La réponse est oui, et cela se produit si et seulement si f ou $-f$ est une fonction strictement convexe.

D'ailleurs, *ce sera désormais notre cadre systématique, de manière à n'évoquer que l'application (univoque) $c^f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Q4. Deux fonctions f et g peuvent-elles donner naissance à la même fonction $(a,b) \mapsto c(a,b)$?

La réponse est oui, et on sait même caractériser la relation existant alors entre de telles fonctions f et g.

Définissons au préalable la relation d'équivalence suivante : Deux fonctions f et g (toujours strictement convexes ou strictement concaves) sont dites *TAF-équivalentes* s'il existe $\alpha \neq 0$, β et γ tels que $x \mapsto g(x) = \alpha f(x) + \beta x + \gamma$ (ou bien $g' = \alpha f' + \beta$). Nous avons alors :

$$(f \text{ et } g \text{ sont TAF-équivalentes}) \Longleftrightarrow \left(c^f = c^g\right). \tag{12}$$

L'implication [$\Rightarrow$] dans (12) est facile, c'est la réciproque qui demande un peu de travail. La référence la plus ancienne que nous ayons trouvée pour ce résultat est [8, p. 129], mais on le retrouve redémontré plus tard dans [3, Corollary 7] et [15].

A ce sujet, il est intéressant de noter que, si

$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y} = \varphi\left[\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right] \text{ pour tout } x \neq y, \tag{13}$$

c'est-à-dire si les quotients différentiels de f et g sont liés par une fonction φ, alors φ est nécessairement une fonction affine $s \mapsto \varphi(s) = \alpha s + \beta$, avec $\alpha \neq 0$. C'est encore un résultat redécouvert plusieurs fois. C'est cette voie qui a été suivie dans [15] pour démontrer l'équivalence (12). En effet, puisque par définition $c^h(x,y) = (h')^{-1}\left[\frac{h(y)-h(x)}{y-x}\right]$ pour tout $x \neq y$, avoir $c^f = c^g$ conduit nécessairement à

$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y} = g' \circ (f')^{-1}\left[\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right] \text{ pour tout } x \neq y.$$

La réponse à cette question **Q4** peut servir à répondre à d'autres questions comme : *Quelles sont les fonctions f pour lesquelles $c^f = c^{f'}$?* Grâce à la caractérisation (12), il s'agit des fonctions f solutions de l'équation différentielle $f' = \alpha f + \beta x + \gamma$, avec $\alpha \neq 0$. Ce sont donc les fonctions $x \mapsto f(x) = e^{\alpha x}$, avec $\alpha \neq 0$, ainsi que leurs TAF-équivalentes. Ceci avait déjà été démontré d'une autre manière dans ([8, p. 129]).

Q5. L'application c^f (ou θ^f) peut-elle caractériser des fonctions f ?

La réponse est oui dans plusieurs cas. Rappelons que $\theta^f(x,h) = \frac{c^f(x,x+h)-x}{h}$.

Donnons quelques exemples :

- $c^f(a,b) = \frac{a+b}{2}$ pour tout a et b, ou bien $\theta^f(x,h) = \frac{1}{2}$ pour tout x et h, a lieu si et seulement si f est une fonction quadratique, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R} \mapsto$

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, avec $\alpha \neq 0$. C'est le seul cas où θ^f ne dépend ni de x ni de h ([8, p. 125]). C'est aussi le seul cas de fonction f pour laquelle $f'(c) = \frac{f'(a) + f'(b)}{2}$.

- Soit $p \in]0, 1[$ différent de $\frac{1}{2}$. Avoir $c^f(a, b) = pa + (1 - p)b$ pour tout a et b, ou bien $\theta^f(x, h) = 1 - p$ pour tout x et h, est impossible.

- Soit $f : x \mapsto f(x) = e^{rx}$, avec $r \neq 0$. Alors $\theta^f(x, h) = \frac{\ln\left[(e^{rh}-1)/h\right]}{rh}$ pour tout x et h, une expression indépendante de x donc. Plus intéressante est la réciproque : $\theta^f(x, h)$ ne dépend pas de x, seulement de h, si et seulement si f est une fonction exponentielle $f(x) = e^{rx}$, $r \neq 0$, ou bien une fonction qui lui est TAF-équivalente ([8, p. 129]).

- Soit $f : x \in]0, +\infty[\mapsto f(x) = x^p$, où p est différent de 0 et de 1. Alors, pour tout $a > 0, b > 0, a \neq b$, on a $c^f(a, b) = \left[\frac{b^p - a^p}{p(b-a)}\right]^{\frac{1}{p-1}}$. En fait, il n'y a que la fonction puissance x^p et toute fonction TAF-équivalente à elle qui donne naissance à une telle fonction $c^f(a, b)$.

Dans le cas particulier où $p = 2$, cela donne les fonctions quadratiques (déjà vu plus haut). Dans un autre cas particulier, celui où $p = -1$, $c^f(a, b) = \sqrt{ab}$ ne vient que de la fonction $1/x$ ou d'une fonction qui lui est TAF-équivalente (*cf.* [1, §3] pour $\sqrt{ab}$).

- Soit $x \in]0, +\infty[\mapsto f(x) = -\ln(x)$. Alors, pour tout $a > 0, b > 0, a \neq b$, on a $c^f(a, b) = \frac{b-a}{\ln(b/a)}$. Il n'y a que la fonction logarithme ou une fonction qui lui est TAF-équivalente pour avoir une telle fonction $c^f(a, b)$.

- Soit $x \in]0, +\infty[\mapsto f(x) = x\ln(x)$. Alors, pour tout $a > 0, b > 0, a \neq b$, on a $c^f(a, b) = \frac{\left(b^b/a^a\right)^{\frac{1}{b-a}}}{e}$ (appelée la moyenne "identrique" de a et b). Ici aussi, il n'y a que que la fonction $x\ln(x)$ ou une fonction qui lui est TAF-équivalente pour avoir une telle fonction $c^f(a, b)$.

Nous reviendrons sur les derniers exemples traités au-dessus ainsi que sur les "fonctions moyennes" un peu plus loin (Question **Q10**). Les trois dernières caractérisations au-dessus sont démontrées dans [1, 3, 15].

Q6. Peut-on comparer c^{f+g} à c^f et c^g ?

Il est évident que $c^{f+g}(a, b) = c^f(a, b) = c^g(a, b)$ dès lors que $c^f(a, b) = c^g(a, b)$; c'est ce qui se passe en tout (a, b) lorsque f et g sont quadratiques. Mis à part des cas particuliers comme celui-là, il est impossible d'obtenir $c^{f+g}(a, b)$ à partir de $c^f(a, b)$ et $c^g(a, b)$. L'encadrement suivant nous a été signalé par P. Lassère.

Théorème 3. *Soit f et g deux fonctions strictement convexes. Si $c^f(a, b) \neq c^g(a, b)$,* alors

$$\min\left[c^f(a, b), c^g(a, b)\right] < c^{f+g}(a, b) < \max\left[c^f(a, b), c^g(a, b)\right].$$

Démonstration. Par définition,

$$\begin{aligned}
\frac{(f+g)(b)-(f+g)(a)}{b-a} &= (f+g)'\left[c^{f+g}(a,b)\right], \\
\frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= f'\left[c^{f}(a,b)\right], \\
\frac{g(b)-g(a)}{b-a} &= g'\left[c^{g}(a,b)\right].
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$(f+g)'\left[c^{f+g}(a,b)\right] = f'\left[c^{f}(a,b)\right] + g'\left[c^{g}(a,b)\right]. \qquad (\mathcal{E})$$

Supposons par exemple $c^f(a,b) < c^g(a,b)$. Puisque f' et g' sont strictement croissantes, il vient :

$$f'\left[c^{f}(a,b)\right] < f'\left[c^{g}(a,b)\right] \text{ et } g'\left[c^{f}(a,b)\right] < g'\left[c^{g}(a,b)\right],$$

d'où

$$(f+g)'\left[c^{f+g}(a,b)\right] < (f+g)'\left[c^{g}(a,b)\right].$$

La fonction $(f+g)'$ étant strictement croissante, son inverse l'est aussi, d'où $c^{f+g}(a,b) < c^g(a,b)$.

Ensuite, et suivant la même démarche, il vient de $(\mathcal{E})$: $c^f(a,b) < c^{f+g}(a,b)$.

Exemple. Supposons que g soit une fonction quadratique. On a :

$$\begin{aligned}
\text{- Si } c^f(a,b) &\leqslant \frac{a+b}{2}, \text{ alors } c^f(a,b) \leqslant c^{f+g}(a,b) \leqslant \frac{a+b}{2}; \\
\text{- Si } c^f(a,b) &\geqslant \frac{a+b}{2}, \text{ alors } c^f(a,b) \geqslant c^{f+g}(a,b) \geqslant \frac{a+b}{2}.
\end{aligned}$$

En conséquence, si $[-\alpha,+\alpha]$ est un intervalle centré en $\frac{a+b}{2}$ de localisation de $c^f(a,b)$, le fait d'ajouter une fonction quadratique à cette fonction f n'altère pas le nouvel intervalle de localisation. C'est ce qui s'est passé, dans un contexte légèrement différent, avec les fonctions polynomiales de degré 3 dans l'exemple à la fin de **Q1** : l'essentiel était la localisation en l'intervalle $[-\alpha,+\alpha]$ centré en $\frac{a+b}{2}$ relatif à $f(x)=x^3$.

Q7. La fonction c^f des deux variables a et b est-elle continue, différentiable ?

La réponse à la question de la continuité est oui sans aucune condition supplémentaire pour une fonction strictement convexe (ou strictement concave) et dérivable. C'est un résultat très ancien, redécouvert régulièrement, et dont nous donnons une démonstration simple dans [11, Section 2].

Pour la différentiabilité de c^f, en tout point (a,b) y compris lorsque $a=b$, il faut des hypothèses supplémentaires sur f. Pour alléger l'écriture, nous définissons la fonction quotient différentiel généralisé q^f de f de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{Pour } a \neq b,\ q^f(a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}; \\ \qquad q^f(d,d) = f'(d). \end{cases}$$

Cela permet d'écrire c^f sous une forme condensée : $c^f = (f')^{-1} \circ q^f$.

Le résultat concernant la différentiabilité de c^f est le suivant ([11, Theorem 2]).

Theorème 4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable vérifiant $f'' > 0$ sur $\mathbb{R}$ (ou bien $f'' < 0$ sur $\mathbb{R}$). Alors, c^f est continûment différentiable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec :*

$$\text{- Si } a \neq b,\ \frac{\partial c^f}{\partial a}(a,b) = \frac{\partial c^f}{\partial b}(b,a) = \rho \left[\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{(b-a)^2} \right] \tag{14a}$$

$$\text{- Si } a = b\ (=d),\ \frac{\partial c^f}{\partial a}(d,d) = \frac{\partial c^f}{\partial b}(d,d) = \frac{1}{2}. \tag{14b}$$

Le coefficient ρ dans $(14a)$ est une quantité strictement positive, d'une écriture un peu compliquée; plus précisément $\rho = \frac{1}{f''\left\{(f')^{-1}\left[q^f(a,b)\right]\right\}}$ [5]. On constate que si $a < b$, les dérivées partielles $\frac{\partial c^f}{\partial a}(a,b)$ et $\frac{\partial c^f}{\partial b}(a,b)$ sont toutes les deux strictement positives (car pour une fonction strictement convexe f, si $v \neq u$, on a $f(v) > f(u) + f'(u)(v-a)$) ; ces propriétés traduisent une croissance du point intermédiaire $c^f(a,b)$ lorsque a croît ou b croît.

La relation $(14b)$, réécrite dans un format $x - h - \theta$, nous indique que, toujours sous l'hypothèse $f''(x) \neq 0$, le coefficient $\theta^f(x,h)$ a une limite quand $h > 0$ tend vers 0 et :

$$\lim_{h \to 0} \theta^f(x,h) = \frac{1}{2}. \tag{15a}$$

On peut compléter ce résultat pour le cas où $f''(x) = 0$, du moins s'il existe des dérivées d'ordre supérieur non nulles en x. En effet : Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$, soit $p \geqslant 2$ le plus petit entier tel que $f^{(p)}(x) \neq 0$; alors, $\theta^f(x,h)$ a une limite quand $h > 0$ tend vers 0 et :

$$\lim_{h \to 0} \theta^f(x,h) = \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{15b}$$

---

5. $(f')^{-1}$ (resp. $\frac{1}{f''}$) est en fait la dérivée (resp. la dérivée seconde) d'une autre fonction strictement convexe f^*, qui est la transformée de Legendre-Fenchel de f. C'est cette approche "explicative" qui a prévalu dans la manière de faire de l'auteur dans [11].

Les résultats (15a) et (15b) se démontrent à l'aide de développements de Taylor-Young de f en x ; ce sont de grands classiques d'exercices quand on traite de ce sujet. La suite de nombres irrationnels $\left\{ \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \right\}_{p\geqslant 3}$, valeurs exactes des $\theta^f(0,h)$ pour les fonctions $f(x) = x^p$, est strictement croissante et tend vers 1 quand $p \to +\infty$. Revoir si nécessaire l'exemple-exercice de la fin du sous-paragraphe **2.1**.

Q8. La fonction $h > 0 \mapsto \theta(x,h)$, prolongée en 0 par $\theta(x,0) = \frac{1}{2}$, est-elle dérivable en 0 ? deux fois dérivable en 0 ?

Ces questions sont naturelles, c'est d'abord celle de la limite éventuelle de $\frac{\theta(x,h)-1/2}{h}$ quand $h \to 0$, c'est-à-dire à la fois l'existence de cette limite et sa valeur, en bref $\frac{\partial\theta}{\partial h}(x,0)$. Mêmes questions à l'ordre 2. Les réponses à ces questions ont été apportées par Gonçalves ([8], pages 128 − 133). Comme on l'imagine en pareil cas, le salut vient de développements de Taylor-Young (de f, de f') en x. Les calculs peuvent devenir vite fastidieux ; pour la commodité du lecteur, nous reproduisons ici la démonstration de la dérivabilité à l'ordre 1.

Théorème 5 ([8]). *(i) Supposons f trois fois dérivable en x. Alors,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\theta(x,h)-1/2}{h} = \frac{\partial\theta}{\partial h}(x,0) = \frac{1}{24}\frac{f'''(x)}{f''(x)}.$$

(ii) Supposons f quatre fois dérivable en x. Alors, $\frac{\partial^2\theta}{\partial h^2}(x,0)$ existe, il se calcule comme $\lim_{h\to 0} \frac{2}{h^2}\left[\theta(x,h) - \frac{1}{2} - h\frac{\partial\theta}{\partial h}(x,0)\right]$ et vaut

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial h^2}(x,0) = \frac{1}{24}\left\{ \frac{f^{(iv)}(x)}{f''(x)} - \left[\frac{f'''(x)}{f''(x)}\right]^2 \right\}.$$

Démonstration de (i). Le TAF appliqué à f en x nous assure l'existence de $\theta \in]0,1[$ (oublions l'écriture de la dépendance en x et h) tel que :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h).$$

Choisissons de faire un second développement, de f' cette fois-ci, dans la direction $h_1 = \theta h$: il existe $\theta_1 \in]0,1[$ tel que

$$f'(x+h_1) = f'(x) + h_1 f''(x+\theta_1 h_1).$$

Pour alléger l'écriture, nous posons $h_1 = \theta h$ (déjà utilisé), $h_2 = \theta_1 h_1$ ($= \theta_1\theta h$).

Soit $\Delta = f(x+h) - f(x) - f'(x)h$. A l'aide des deux développements au-dessus, nous avons :

$$\begin{aligned}
\Delta &= -f'(x)h + hf'(x+h_1) = h\left[f'(x+h_1) - f'(x)\right], \\
\Delta &= h\left[f'(x+h_1) - f'(x)\right] = hh_1 f''(x+h_2). \qquad (16)
\end{aligned}$$

Retranchons de part et d'autre $\frac{h^2}{2}f''(x)$, et ajoutons et soustrayons $hh_1f''(x)$ dans le second membre de (16). Nous arrivons à :

$$\Delta - \frac{h^2}{2}f''(x) = hh_1\left[f''(x+h_2) - f''(x)\right] + h^2 f''(x)\left[\theta(x,h) - \frac{1}{2}\right]. \qquad (17)$$

Transformons le premier membre en un reste de TAYLOR-YOUNG ; appliquons au premier crochet du second membre la définition même d'une dérivée. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\Delta - \frac{h^2}{2}f''(x) &= \frac{h^3}{6}\left[f'''(x) + \varepsilon_3\right], \\
f''(x+h_2) - f''(x) &= f'''(x)h_2 + \varepsilon_2 h_2,
\end{aligned}$$

où ε_3 et ε_2 tendent vers 0 avec h. A présent, (17) devient

$$\frac{h^3}{6}\left[f'''(x) + \varepsilon_3\right] = hh_1h_2f'''(x) + hh_1h_2\varepsilon_2 + h^2 f''(x)\left[\theta(x,h) - \frac{1}{2}\right].$$

Divisons les deux membres par h^3, sans perdre de vue que $hh_1 = \theta h^2$, d'où $hh_1h_2 = \theta^2\theta_1 h^3$:

$$\frac{1}{6}\left[f'''(x) + \varepsilon_3\right] = \theta^2\theta_1\left[f'''(x) + \varepsilon_2\right] + f''(x)\left[\frac{\theta(x,h) - 1/2}{h}\right]. \qquad (18)$$

Nous allons à présent passer à la limite quand $h \to 0$. On sait déjà que $\theta \to \frac{1}{2}$.

Premier cas. Lorsque $f'''(x) \neq 0$. D'après le resultat évoqué en (15a) (sur la limite du coefficient θ), mais appliqué à f' (dont la dérivée seconde en x est $f'''(x)$), on a $\theta_1 \to \frac{1}{2}$. En définitive, au vu de (18),

$$\frac{\theta(x,h) - 1/2}{h} \text{ a une limite quand } h \to 0,$$

et cette limite est celle annoncée dans l'énoncé du Théorème 5.

Deuxième cas. Lorsque $f'''(x) = 0$. Ca marche aussi, il suffit de se reporter au développement (18) : $0 < \theta^2\theta_1 < 1$, ε_3 et ε_2 tendent vers 0 avec h.

Remarque-Exercice. Comme on l'imagine, l'existence de la dérivée d'ordre 5 de f en x doit permettre de démontrer que $\frac{\partial^3\theta}{\partial h^3}(x,0)$ existe et de calculer son expression.

Q9. Peut-on caractériser les fonctions symétriques c des deux variables a et b qui seraient des c^f de fonctions f ?

La réponse est oui, même si la caractérisation est peu pratique d'utilisation. Supposons que c soit deux fois différentiable sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et vérifie :

$$\left\{\begin{array}{c} c(a,b) = c(b,a) \text{ pour tout } a \text{ et } b \text{ ;} \\ c(d,d) = d \text{ pour tout } d \text{ ;} \\ \frac{\partial c}{\partial a}(a,b) \text{ et } \frac{\partial c}{\partial b}(a,b) \text{ strictement positives pour tout } a < b. \end{array}\right.$$

Ces conditions sont naturelles quand on souhaite être une fonction "point intermédiaire" c^f. ROTHE énonça en 1921 une condition nécessaire pour que c soit un c^f, condition qui s'avéra suffisante d'après un travail de BOJANIĆ en 1950 ; elle s'écrit à l'aide des dérivées partielles jusqu'à l'ordre deux de c. Voici la condition de ROTHE-BOJANIĆ :

$$\frac{\partial^2 c/\partial a\partial b}{\partial c/\partial a.\partial c/\partial b} + \frac{\partial c/\partial a - \partial c/\partial b}{(b-a).\partial c/\partial a.\partial c/\partial b} \text{ est une fonction de } c \text{ seul.} \qquad (\mathcal{RB})$$

Bien sûr, les dérivées partielles sont évaluées en (a,b) avec $a \neq b$.

Il y a un côté mystérieux dans $(\mathcal{RB})$; nous allons l'éclaircir. Pour cela, nous supposons, en sus des hypothèses faites précédemment, que f est trois fois dérivable, ce qui assure la différentiabilité d'ordre deux de c^f. Le TAF exprime que $f(b) - f(a) = f'[c(a,b)](b-a)$, ce qui induit

$$\frac{\partial^2}{\partial a\partial b}[f(b) - f(a)] = 0 = \frac{\partial^2}{\partial a\partial b} f'[c(a,b)].$$

Il suffit à présent de détailler cette dernière relation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} f'[c(a,b)] &= -f'[c(a,b)] + (b-a)f''[c(a,b)]\frac{\partial c}{\partial a}, \\ &\text{puis} \\ \frac{\partial^2}{\partial a\partial b} f'[c(a,b)] &= -f''[c(a,b)]\frac{\partial c}{\partial b} + f''[c(a,b)]\frac{\partial c}{\partial a} + \\ &\quad +(b-a)f'''[c(a,b)]\frac{\partial c}{\partial b}\frac{\partial c}{\partial a} + (b-a)f''[c(a,b)]\frac{\partial^2 c}{\partial a\partial b}. \end{aligned}$$

Ecrire que $\frac{\partial^2}{\partial a\partial b} f'[c(a,b)] = 0$ conduit directement à

$$\frac{\partial^2 c/\partial a\partial b}{\partial c/\partial a.\partial c/\partial b} + \frac{\partial c/\partial a - \partial c/\partial b}{(b-a).\partial c/\partial a.\partial c/\partial b} = -\frac{f'''[c(a,b)]}{f''[c(a,b)]}, \qquad (\mathcal{RB}')$$

soit $(\mathcal{RB})$. Ce quotient $\frac{f'''}{f''}$, que nous avons rencontré plus haut, se retrouve d'ailleurs dans d'autres études concernant $c(a,b)$, en [7, page 121] par exemple. Par double primitivation (ou quadrature), la condition $(\mathcal{RB}')$ peut servir à "remonter" de c à une fonction f qui lui a donné naissance, c'est-à-dire telle que $c = c^f$. A titre d'exemple, $c(a,b) = \sqrt{ab}$ conduit à l'équation différentielle $-\frac{f'''(x)}{f''(x)} = \frac{3}{x}$, $x > 0$. *In fine*, on arrive aux fonctions TAF-équivalentes à $x > 0 \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$, resultat déjà évoqué plus haut en **Q5**.

Q10. Les fonctions c^f sont-elles des "fonctions moyennes", et toutes les "fonctions moyennes" sont-elles nécessairement du type c^f ?

La notion de "moyenne" ou de "fonction moyenne" μ de deux réels positifs est une notion très générale en mathématiques et abondamment étudiée. Une moyenne $\mu :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifie *a minima* les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{Si } a < b,\ a < \mu(a,b) < b\ ; \\ \mu(a,b) = \mu(b,a) \text{ pour tout } a \text{ et } b\ ; \\ \mu(d,d) = d \text{ pour tout } d\ ; \\ \mu \text{ est séparément strictement croissante en } a \text{ et } b. \end{cases} \qquad (\mathcal{M})$$

On peut y ajouter des propriétés topologiques comme la continuité ou la différentiabilité de μ comme fonction des deux variables a et b.

Comme on l'a noté plus haut, les fonctions c^f vérifient ces propriétés $(\mathcal{M})$. Parfois s'ajoute une propriété particulière de la moyenne μ, c'est son homogénéité d'ordre 1, à savoir :

$$\mu(ta, tb) = t\mu(a,b) \text{ pour tout } t > 0 \text{ (et, bien sûr, tout } a > 0 \text{ et } b > 0). \quad (19)$$

Ce n'est pas une propriété nécessairement vérifiée par une fonction c^f ; par exemple, pour la fonction exponentielle $f : x > 0 \mapsto f(x) = e^x$, on a $c^f(a,b) = a + \ln\left(\frac{e^{b-a}-1}{b-a}\right)$ qui ne vérifie pas (19).

Voyons ce qu'il en est des moyennes usuelles. Les voici :

$$\begin{aligned} &\text{Moyenne arithmétique} &:\quad& A(a,b) = \frac{a+b}{2}\ ; \\ &\text{Moyenne géométrique} &:\quad& G(a,b) = \sqrt{ab}\ ; \\ &\text{Moyenne harmonique} &:\quad& H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}\ ; \\ &\text{Moyenne logarithmique} &:\quad& L(a,b) = \frac{b-a}{\ln(b/a)}\ ; \\ &\text{Moyenne identrique} &:\quad& I(a,b) = \frac{\left(b^b/a^a\right)^{\frac{1}{b-a}}}{e}. \end{aligned}$$

Toutes ces moyennes sont positivement homogènes de degré 1, et toutes sauf une (la moyenne harmonique) sont des fonctions c^f ; on a donné en répondant à **Q5** les fonctions-sources f. Le cas de la moyenne harmonique sera élucidé dans la réponse à **Q11** ci-dessous.

A ces moyennes classiques s'ajoutent les *moyennes quasi-arithmétiques* μ_φ construites à partir de fonctions strictement croissantes φ de la manière suivante :

$$\mu_\varphi(a,b) = \varphi^{-1}\left[\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right].$$

Par exemple : la moyenne géométrique est une moyenne quasi-arithmétique, associée à $\varphi(x) = \ln(x)$; la moyenne harmonique est une moyenne quasi-arithmétique, associée à $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Mais la moyenne logarithmique n'est pas une moyenne quasi-arithmétique.

Q11. Quelles sont les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ pour lesquelles les fonctions "points intermédiaires" c^f sont positivement homogènes de degré 1 ?

Il se trouve que la question est complètement réglée dans un article de Golab et Lojasiewicz publié en 1956 ([7]) ; c'est la plus ancienne référence que nous ayons trouvée, mais les résultats ont été redécouverts en utilisant des méthodes différentes, dans [16, §5] par exemple. A la TAF-équivalence près, seules les 3 fonctions f suivantes donnent naissance à des fonctions c^f positivement homogènes de degré 1 :

Les fonctions x^p, où où p est différent de 0 et de 1 ;
La fonction $\ln(x)$;
La fonction $x\ln(x)$.

On a déjà vu en répondant à **Q5** que la fonction logarithme donnait naissance à la moyenne logarithmique, et que la fonction $x\ln x$ donnait naissance à la moyenne identrique. Quant à la fonction x^p, elle donne naissance à autant de moyennes du type c^f positivement homogènes de degré 1 qu'il y a de p différents de 0 et 1. Nous avons déjà vu l'exemple de $p = 2$ (moyenne arithmétique) et celui de $p = -1$ (moyenne géométrique). Donnons quelques autres exemples :

$$c^f(a,b) = \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 = \frac{A(a,b)+G(a,b)}{2} \text{ lorsque } f(x) = \sqrt{x} \text{ ;}$$

$$c^f(a,b) = \left[\frac{\sqrt{ab}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2}\right]^{\frac{2}{3}} \text{ lorsque } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ ;}$$

$$\begin{aligned}
c^f(a,b) &= \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}} \text{ lorsque } f(x)=x^3\ ;\\
c^f(a,b) &= \left(\frac{2a^2b^2}{a+b}\right)^{\frac{1}{3}} = \left[H(a,b)\ G^2(a,b)\right]^{\frac{1}{3}} \text{ lorsque } f(x)=\frac{1}{x^2}\ ;\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

D'après ce que nous avons vu en **Q7**, toutes ces moyennes ont le même comportement limite, $c^f(a,b) \sim \frac{a+b}{2}$, quand a et b tendent vers un même point d.

Reste à montrer que la moyenne harmonique H ne peut être du format c^f. On pourrait, bien sûr, utiliser la caractérisation de Rothe-bojanić (voir **Q9**), mais il y a plus simple. D'après ce qui a été vu plus haut, cette moyenne harmonique ne pourrait provenir que d'une fonction du type $f : x > 0 \mapsto f(x) = x^p$. Montrons simplement, comme le fait Mays ([17, pages 682 − 683]) que c'est impossible. Si c'était le cas pour une certaine puissance p, on devrait avoir :

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = p\,[H(1,2)]^{p-1}\ ; \tag{20}$$

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = p\,[H(1,3)]^{p-1}\ ; \tag{21}$$

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = p\,[H(1,4)]^{p-1}\ ; \tag{22}$$

etc.

L'équation (20), c'est-à-dire $\left(\frac{2^p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \frac{4}{3}$, conduit à $p = -4,14457...$; l'équation (21), c'est-à-dire $\left(\frac{3^p-1}{2p}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \frac{3}{2}$, conduit à $p = -4,36363...$; l'équation (22), c'est-à-dire $\left(\frac{4^p-1}{3p}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \frac{8}{5}$, conduit à $p = -2,46616...$

Remarque. Il est intéressant de noter que l'ensemble des fonctions répondant à cette question **Q11** est stable par l'involution (familière en Analyse convexe) $f \rightsquigarrow f^{\diamondsuit}$, où $f^{\diamondsuit} : x > 0 \mapsto f^{\diamondsuit}(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$. C'est le TAF appliqué à cette fonction qui déclenche le théorème de la valeur moyenne de Pompeiu ([9], Vol. 2, Tapa 1) : Il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a} = cf'(c) - f(c). \tag{23}$$

La clé de voûte dans la démarche de Matkowski dans [16] est de montrer que si f est une fonction de la classe recherchée (répondant à la question

Q11), alors $c^g = c^f$ lorsque $g : x > 0 \mapsto g(x) = xf'(x) - f(x)$. Il y a probablement une transformation de LEGENDRE sous-jacente à tout cela.

Q12. Quelles sont les fonctions pour lesquelles les fonctions "points intermédiaires" c^f sont des moyennes quasi-arithmétiques ?

On voudrait donc que

$$c^f(a,b) = \varphi^{-1}\left[\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right],$$

où φ est une fonction strictement croissante. Nous en avons déjà vu au moins trois exemples :

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= u,\ c^f(a,b) = \frac{a+b}{2},\ \ f(x) = x^2\,; \\
\varphi(u) &= \ln(u),\ \ c^f(a,b) = \sqrt{ab},\ \ f(x) = \frac{1}{x}\,; \\
\varphi(u) &= \sqrt{u},\ \ c^f(a,b) = \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2,\ \ f(x) = \sqrt{x}.
\end{aligned}$$

BOJANIĆ ([4, Section 3]) répond à cette question posée **Q12** en supposant φ deux fois dérivable et $\varphi' > 0$. Ce sont les fonctions φ dont la dérivée est de la forme

$$\varphi'(u) = \frac{1}{\sqrt{Au^2+Bu+C}},$$

où A, B, C sont des constantes réelles.

Ensuite, à partir de φ, on "remonte" à une fonction génératrice f via l'équation différentielle $f'' = \frac{1}{[\varphi']^3}$.

Q13. Retour au contexte général. Y-a-t-il des variantes "multi-points" du TAF ?

La réponse est oui... même si on n'en voit pas l'utilité. Ce qui va déclencher ce type de résultat est la propriété de DARBOUX (1875) de toute fonction dérivée f' : la dérivée f' d'une fonction dérivable f "ne crée pas de trous", c'est-à-dire que l'image de tout intervalle par f' est un intervalle. Voici donc un TAF multi-points, tiré de [13].

Theorème 6. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Alors :*

(i) Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe n points distincts c_i *dans* $]a, b[$ *tels que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c_1) + f'(c_2) + ... + \ f'(c_n)}{n}. \tag{24}$$

(ii) Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe n points distincts c_i *dans* $]a, b[$ *tels que*

$$\left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]^n = f'(c_1) \times f'(c_2) \times ... \times \ f'(c_n). \tag{25}$$

(iii) En supposant $f(b) \neq f(a)$, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe n points distincts c_i *dans* $]a, b[$ *tels que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{n}{1/f'(c_1) + 1/f'(c_2) + ... + 1/f'(c_n)}. \tag{26}$$

3. Complément historico-bibliographique

Cette “revisite” du théorème des accroissements finis (TAF) que nous venons d’effectuer nous a conduit à revoir des références en remontant assez loin dans le temps. Il est vrai qu’à une époque, les Analystes étaient friands de ce théorème et de ses variantes. Notons au passage que bien des mathématiciens européens, écrivant dans des revues de leurs pays, rédigeaient alors en français ([4, 7, 8, 18, 20] par exemple) ; c’est peu dire que les choses ont changé.

Pour des résultats mathématiques encore plus anciens, il est souvent difficile de dire de manière précise “qui a fait quoi”, car il y a des préversions, des énoncés corrects mais des démonstrations incomplètes ou erronées, des conditions nécessaires qui ensuite ont été améliorées en conditions nécessaires et suffisantes, etc. Pour une étude historique du sujet (théorème des accroissements finis, théorème de la valeur moyenne), nous renvoyons à l’ouvrage de Flett ([6], pages 54 – 67) et à l’étude fouillée de Dugac ([5]).

Comme cela a été indiqué dans le corps du texte, il y a des variantes au TAF, celles de Cauchy, Peano, Flett, Pompeiu, celle du “point milieu”, celle pour les fontions convexes non dérivables, celles du “second ordre”, etc., autant d’occasions d’exercices intéressants et d’interprétations graphiques dans le contexte de la géométrie du plan ([9]).

La période plus récente, disons des quarante dernières années, a été plutôt marquée par des TAF pour des fonctions non dérivables (convexes, localement Lipschitz, semicontinues inférieurement, etc.), utilisant pour cela des substituts à la notion de dérivée (des ensembles $\partial f(c)$ en fait au lieu du singleton $\{f'(c)\}$) ; les contributions les plus anciennes à cet égard sont signalées dans ([10]). Il n'en reste pas moins que le format visé est toujours à peu près le même, celui du TAF pour les fonctions dérivables, plus précisément : Il existe $c \in (a, b)$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \in \partial f(c)$.

Références

Parmi les références les plus anciennes, auxquelles nous avons eu accès, les plus fécondes pour l'objectif que nous nous étions fixés, ont été les articles de J. V. GONÇALVES (1941)*,* R. BOJANIĆ (1950) *et* S. GOLAB-S. LOJASIEWICZ (1956)*.*

1. J. ACZÉL and M. KUCZMA, *On two mean value properties and functional equations associated with them.* Aequationes Mathematicae 38 (1989), 216 – 235.

2. D. AZÉ et J.-B. HIRIART-URRUTY, *Sur un air de Rolle and Rolle.* Revue de la filière mathématiques RMS (ex-Revue de Mathématiques Spéciales), N°3 – 4,(2000) 455 – 460.

3. L. BERRONE and J. MORO, *Lagrangean means.* Aequationes Mathematicae 55 (1998), 217 – 226.

4. R. BOJANIĆ, *Sur la formule des accroissements finis.* Acad. Serb. Sci. Publ. Inst. Math. 3 (1950), 219 – 226.

5. P. DUGAC, *Histoire du théorème des accroissements finis.* Archives internationales d'histoire des sciences 30 (1980), 86 – 101.

6. T. M. FLETT, *Differential analysis.* Cambridge University Press (1980).

7. S. GOLAB and S. LOJASIEWICZ, *Un théorème sur la valeur moyenne θ dans la formule des accroissements finis.* Annales Polonici Mathematici 3 (1956), 118 – 125.

8. J. V. GONÇALVES, *Sur l'inconnue θ du théorème des accroissements finis.* Portugaliae Mathematica 2 (1941), 121 – 128.

9. J.-B. HIRIART-URRUTY, *Mathematical Tapas, Vol. 1* (2016), Vol. *2* (2017). Springer Undergraduate Mathematics Series.

10. J.-B. HIRIART-URRUTY, *Mean value theorems and convexity : an example of cross-fertilization of two mathematical items.* Elemente Der Mathematik, Vol. 75, N°2 (2020), 69 – 79.

11. J.-B. HIRIART-URRUTY, *Sensitivity of the "intermediate point" in the mean value theorems : an approach via the Legendre-Fenchel transformation.* A paraître dans ESAIM Proceedings and Surveys (2021).

12. J.-B. HIRIART-URRUTY, *Le théorème des accroissements finis, encore et encore...* Quadrature N°117 (2020).

13. D. S. MARINESCU and M. MONEA, *Some mean value theorems as consequences of the Darboux property.* Mathematica Bohemica 142, N°2 (2017), 211 – 224.

14. F. Martínez de la Rosa, *Panorámica de los teoremas de valor medio.* Miscelánea Matemática 47 (2008), 23 – 38.

15. J. Matkowski, *Mean value properties and associated functional equations.* Aequationes Mathematicae 58 (1999), 46 – 59.

16. J. Matkowski, *On homogeneous Lagrange means.* Period. Math. Hungarica 68 (2014), 119 – 127.

17. M. E. Mays, *Functions which parametrize means.* The American Mathematical Monthly 90, N°10 (1983), 677 – 683.

18. D. Pompeiu, *Sur le théorème des accroissements finis.* Annales Scientifiques de l'université de Iasi en Roumanie, Vol. 25 (1928), 335 – 337.

19. Q. I. Rahman and G. Schmeisser, *Analytic Theory of Polynomials.* Clarendon Press, Oxford (2002).

20. L. Tchakaloff, *Sur le théorème des accroissements finis.* Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (1931), 32 – 35.